Compléments à l'article *Introduction à l'équation de Kepler*

de Daniel Descout, Cahiers Clairaut n° 177 pages 26 à 31

Résolution par la méthode de Newton-Raphson

(https://media4.obspm.fr/public/AAM/pages_suites-reelles/exo-keplerxnewton.html)

Principe

Recherche du zéro de la fonction :

$$f(x) = x - e.\sin(x) - M.$$

Méthode itérative

Étude de la suite $\{v_n\}$ telle que :

$v_{n+1} = v_n - f(v_n)/f'(v_n)$.

Si cette suite admet une limite L, avec f'(L) non nulle, alors f(L) = 0. Donc L = E.

La fonction dérivée est : f'(x) = 1 – e.cos(x), jamais nulle si e < 1, et positive sur tout l'intervalle de définition ; donc la fonction continue f(x) y est monotone croissante.

Comme f(0) = – M (< 0), et que f(π) = π – M (> 0), f(x) admet un zéro et un seul, dans l'intervalle [0, π] (théorème des valeurs intermédiaires).

Mêmes choix que pour la méthode précédente : e = 0,5 et M = π/2 rad.

On calcule les termes de la suite $\{v_n\}$:

Avec $v_0 = 0$, $v_1 = \pi$; $v_2 = 2\pi/3 = 2{,}094\,395$ (rad) ; $v_3 = 8\pi/15 + \sqrt{3}/5 = 2{,}021\,926$; $v_4 = 2{,}020\,980$.

Par cette méthode, la solution approchée à 10^{-6} près est obtenue après seulement quatre itérations.

Détermination graphique des termes de la suite $\{v_n\}$ (en vert ; figure 9) .

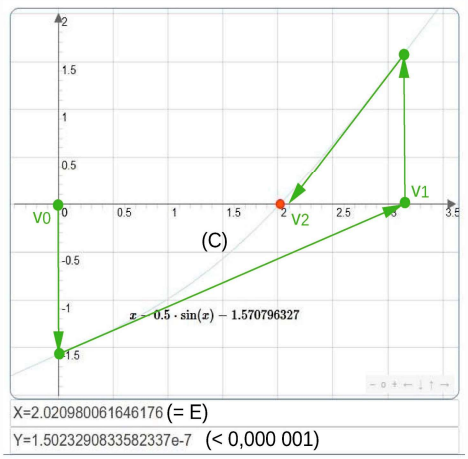


Figure 9

Le zéro de la fonction est déterminé grâce au grapheur (courbe (C))
(https://www.solumaths.com/fr/graphique-logiciel-traceur-courbe/tracer).

De l'origine (0, 0), effectuer une translation parallèle à OY jusqu'à la courbe (C). De ce point, tracer la tangente qui coupe l'axe OX en $x = v_1$. De ce point, effectuer une translation parallèle à OY jusqu'à la courbe (C). De ce point, tracer la tangente qui coupe l'axe OX en $x = v_2$. Recommencer les deux étapes à partir de ce point pour obtenir le point d'abscisse (v_3). Et ainsi de suite jusqu'à la limite.

La figure 10 illustre ce cas particulier : e = 0,5, t = T/4, et E = 2,020 980 (rad). On en déduit s(T/4) et r(T/4)/a.

On utilise la relation entre tan(E/2) et tan(s/2), avec $\varepsilon = \sqrt{(1+e)/(1-e)}$. Avec $\varepsilon = \sqrt{3}$, on calcule : ***s = 140° 11'***.

Avec r/a = 1 – e.cos(E), et cos(E) = – 0,435 131 , on calcule : ***r/a = 1,217 565*** .

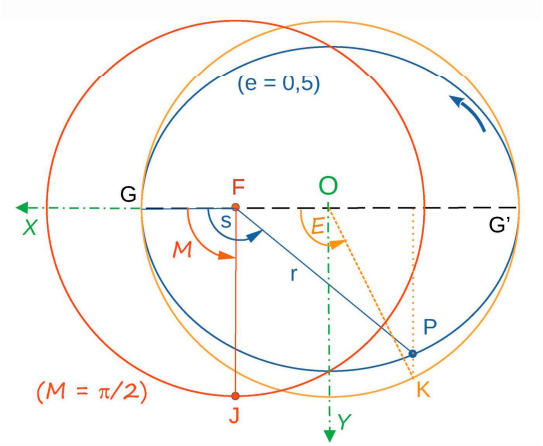


Figure 10

Résolution par la méthode de Lagrange

La résolution de l'équation de Kepler, où M apparaît comme une fonction explicite de E, consiste à trouver une expression où E apparaît comme une fonction explicite de M. La solution trouvée par Lagrange est celle de développements en série. Lagrange a développé E – M en série trigonométrique (termes en sin(nM)), avec des coefficients fonctions de l'excentricité e (fonctions de Bessel). Lagrange a aussi donné le développement de E – M en série entière de e. Les coefficients de e^n sont de la forme : $(1/n!).a_n(M)$, avec $a_n(M)$ comme dérivée (n – 1) ième de sin(nM) par rapport à M.

Ces développements mathématiques et leurs applications dépassent le cadre de cet article.